

Oscilações acopladas

REGISTRO E ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES DE DOIS PÊNDULOS IDÊNTICOS E ACOPLADOS.

- Registro da oscilação em fase e determinação da sua duração de oscilação T_+ .
- Registro da oscilação afásica e determinação da sua duração de oscilação T_- .
- Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima e determinação do seu período T assim como da duração de flutuação T_Δ .
- Comparação das durações medidas de flutuação e de período com os valores calculados a partir do período próprio T_- e T_+ .
- Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas.

UE1050600

03/16 CW

ALLGEMEINE GRUNDLAGEN

Durante a oscilação de dois pêndulos acoplados, a energia de oscilação é transferida entre os ambos pêndulos de um lado para o outro. Se os pêndulos são idênticos e a sua oscilação é iniciada de modo que um dos pêndulos se encontre em posição de repouso enquanto o outro se encontra na posição de máxima amplitude, então, a transferência de energia é completa. Ou seja, a cada vez um dos pêndulos chega à posição de repouso total, enquanto que o outro oscila na sua amplitude máxima. O tempo transcorrido entre dois pontos de repouso de um dos pêndulos, ou em geral entre dois momentos nos quais o pêndulo oscila com a mínima amplitude, é chamado T_Δ .

As oscilações de dois pêndulos matemáticos idênticos e acoplados podem ser descritas como a superposição de duas oscilações próprias. Estas oscilações próprias podem ser observadas quando os pêndulos são

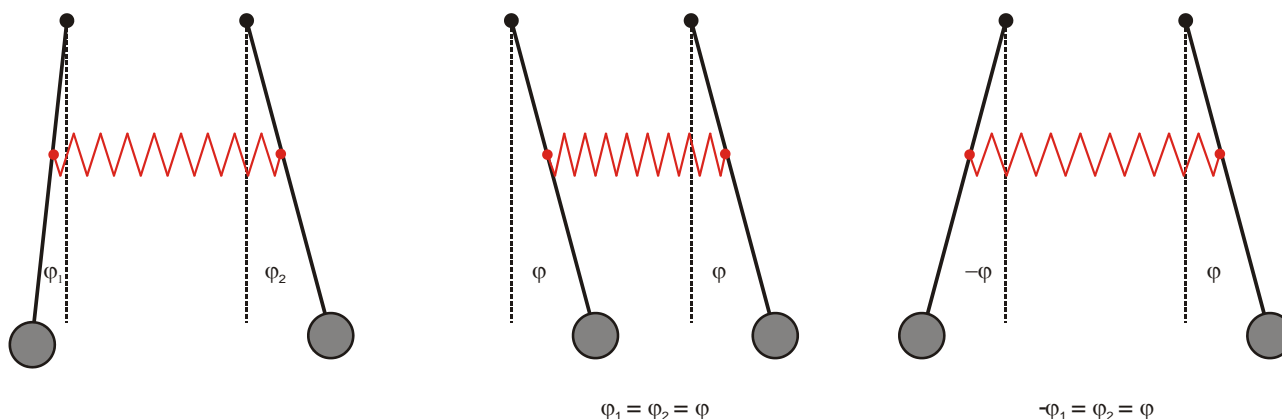
levados a oscilar em fase ou de modo afásico. No primeiro caso os pêndulos oscilam sem influência do acoplamento com a frequência do pêndulo não acoplado, no segundo caso, eles oscilam com a influência máxima do acoplamento com uma frequência própria maior. Todas as outras oscilações podem ser representadas como sobreposições destas duas oscilações.

A equação de movimento dos pêndulos (para pequenos ângulos de amplitude φ_1 e φ_2) tem a forma:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_1 + g \cdot \varphi_1 + k \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_2 + g \cdot \varphi_2 + k \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

g : aceleração da gravidade, L : comprimento do pêndulo, k : constante de acoplamento.

Fig. 1: Esquerda: oscilação acoplada em geral, meio: oscilação acoplada em fase, direita: oscilação acoplada afásica



Para as grandezas auxiliares (primeiro introduzidas de forma aleatória) $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ e $\varphi_- = \varphi_1 - \varphi_2$ resultam então as equações de movimento:

$$\begin{aligned} L \cdot \ddot{\varphi}_+ + g \cdot \varphi_+ &= 0 \\ L \cdot \ddot{\varphi}_- + (g + 2k) \cdot \varphi_- &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cujas soluções

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) \\ \varphi_- &= a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t) \end{aligned} \quad (3)$$

Com as frequências circulares

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{e} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}} \quad (4)$$

correspondentes às oscilações próprias descritas com excitação em fase ou afásica (é válido $\varphi_+ = 0$ no caso da oscilação afásica e $\varphi_- = 0$ no caso da oscilação em fase).

Os balanços do pêndulo podem ser calculados a partir da soma ou da diferença das duas grandezas auxiliares, e assim obtém-se a solução

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) + a_- \cos(\omega_- t) + b_- \sin(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} (a_+ \cos(\omega_+ t) + b_+ \sin(\omega_+ t) - a_- \cos(\omega_- t) - b_- \sin(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (5)$$

Sendo que aqui, os parâmetros a_+ , a_- , b_+ e b_- são primeiramente grandezas aleatórias que podem ser calculadas a partir do estado de oscilação de ambos pêndulos no momento $t = 0$.

O caso a seguir é o mais fácil de se descrever, o qual é provocado quando o pêndulo 1 no momento 0 é deslocado do ponto zero num ângulo de amplitude φ_0 e logo largado, enquanto o pêndulo 2 se encontra em repouso no ponto zero.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) + \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\varphi_0 \cdot \cos(\omega_+ t) - \varphi_0 \cdot \cos(\omega_- t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Após uma reformulação matemática obtém-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \\ \varphi_2 &= \varphi_0 \cdot \sin(\omega_\Delta t) \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

com

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &= \frac{\omega_- - \omega_+}{2} \\ \omega &= \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Isto corresponde à oscilação de ambos pêndulos com a mesma frequência circular ω , sendo que as suas amplitude são moduladas com a frequência circular ω_Δ . Uma tal modulação é chamada de flutuação. No caso presente, pode-se até falar de flutuação máxima, porque a amplitude atinge como valor mínimo o zero.

LISTA DE APARELHOS

2 pêndulo de vara com registrador de ângulo @230 V	1000763 (U8404275-230)
ou	
2 pêndulo de vara com registrador de ângulo @115 V	1000762 (U8404275-115)
1 mola helicoidal 3,9 N/m	1002945 (U15027)
2 fixador de mesa	1002832 (U1326)
2 vara de apoio, 1000 mm	1002936 (U15004)
1 vara de apoio, 470 mm	1002934 (U15002)
4 manga universal	1002830 (U13255)
2 cabo HF, BNC / conector de 4 mm	1002748 (U11257)
1 3B NETlog™ @230 V	1000540 (U11300-230)
ou	
1 3B NETlog™ @115 V	1000539 (U11300-115)
1 3B NETlab™	1000544 (U11310)
1 PC com Windows, Internet Explorer e entrada USB	

MONTAGEM

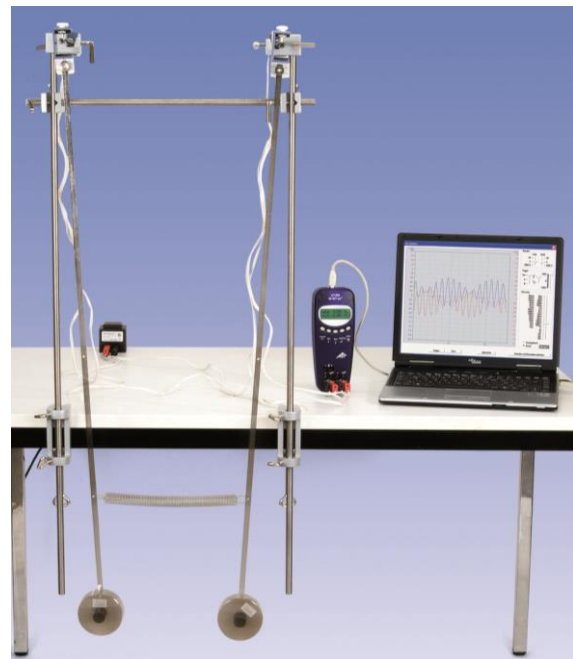


Fig. 2 Montagem para o registro e a análise das oscilações de dois pêndulos idênticos acoplados

A montagem está representada na fig. 2.

- Fixar as varas de apoio de 1000 mm de comprimento na mesa, a distâncias de aproximadamente 15 cm umas das outras, por meio das pinças de mesa.
- Instalar a vara de apoio curta na horizontal para proporcionar mais estabilidade à montagem.
- Fixar o registrador de ângulo por meio da manga universal na extremidade superior da vara de apoio vertical.
- Fixar as massas pendulares nas extremidades inferiores das varas dos pêndulos.

- Pendurar as varas de pêndulos no registrador de ângulo (para as pontas das varas de pêndulo foram previstos entalhos nas varas do registrador de ângulo).
- Pendurar a mola parafuso nos orifícios que se encontram nas varas dos pêndulos, os quais se encontram a uma distância de aproximadamente 40 cm do ponto de pendurar.
- Conectar a fonte de alimentação com ambos registradores de ângulo.
- Conectar o 3B NET/og™ com o computador.
- Conectar ambos registradores de ângulo levando em conta a polaridade (vermelho: pólo "+", preto: pólo "-") nas entradas de tensão do 3B NET/og™.

EXECUÇÃO

- Ligar o 3B NET/og™ e iniciar o programa de computador 3B NET/lab™.
- Selecionar "Laboratório de medição" e criar um novo jogo de dados.
- Selecionar as entradas analógicas A e B e ajustar a faixa de medição para cada uma em 2 V em modo tensão contínua.
- Ajustar os seguintes critérios de medição: taxa: 50 Hz, número de valores de medição: 600, modo: padrão.

EXEMPLOS DE MEDIÇÃO

1. Oscilações em fase acopladas

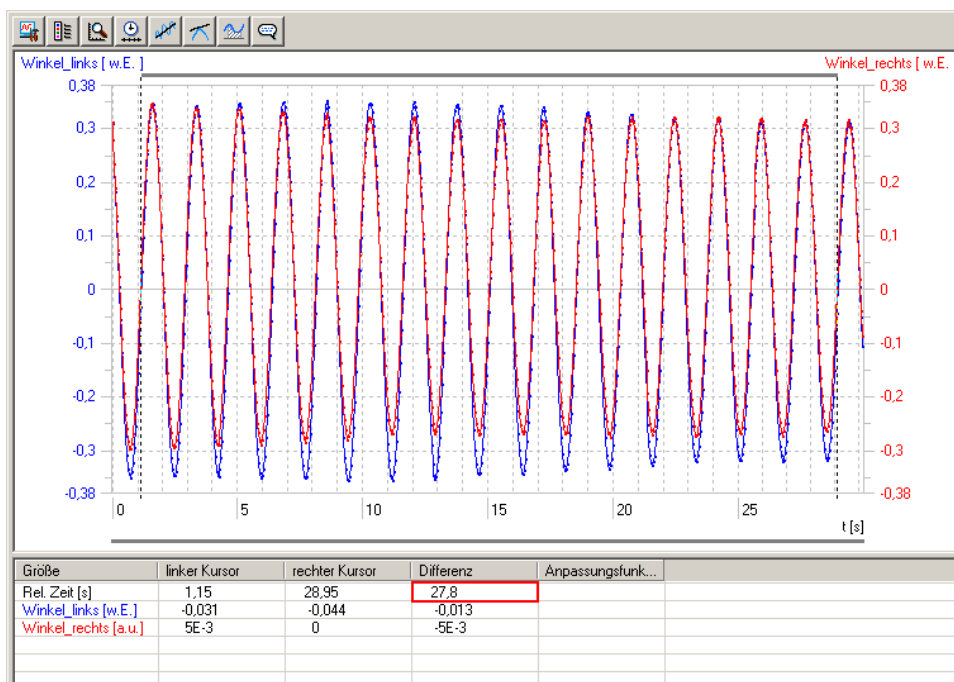


Fig. 3 Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada.

1. Registro da oscilação de fase idêntica

- Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude na mesma direção e solta-los simultaneamente.
- Iniciar o registro da medição no 3B NET/lab™.
- Após terminar o registro dos valores de medição, selecionar "reset" e gravar a medição com um nome representativo.

2. Registro da oscilação em contra fase

- Deslocar ambos pêndulos num mesmo (pequeno) ângulo de amplitude em direções contrárias e solta-los simultaneamente.
- Reiniciar o registro de valores de medição no 3B NET/lab™.
- Após terminar o registro dos valores de medição, selecionar "reset" e gravar a medição com um nome representativo.

3. Registro de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Selecionar "Alterar configuração" e aumentar o número de valores de medição para 1200.
- Deslocar uma das varas de pêndulo, segurando a outra no ponto zero e soltar ambas simultaneamente.
- Reiniciar o registro de valores de medição no 3B NET/lab™.
- Após terminar o registro dos valores de medição, selecionar "reset" e gravar a medição com um nome representativo.

2. Oscilação acoplada em contra fase

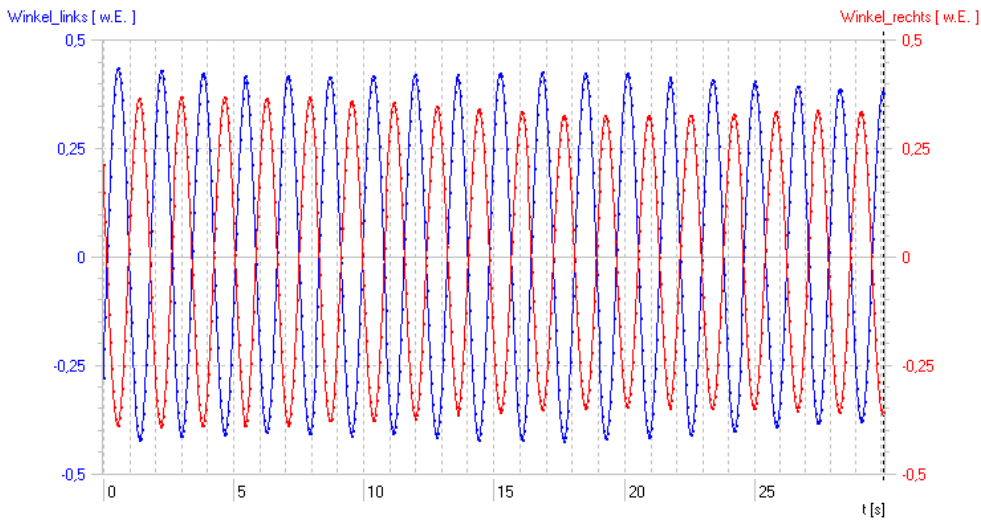


Fig. 4 Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada em contra fase (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada.

3. Oscilação acoplada com flutuação máxima

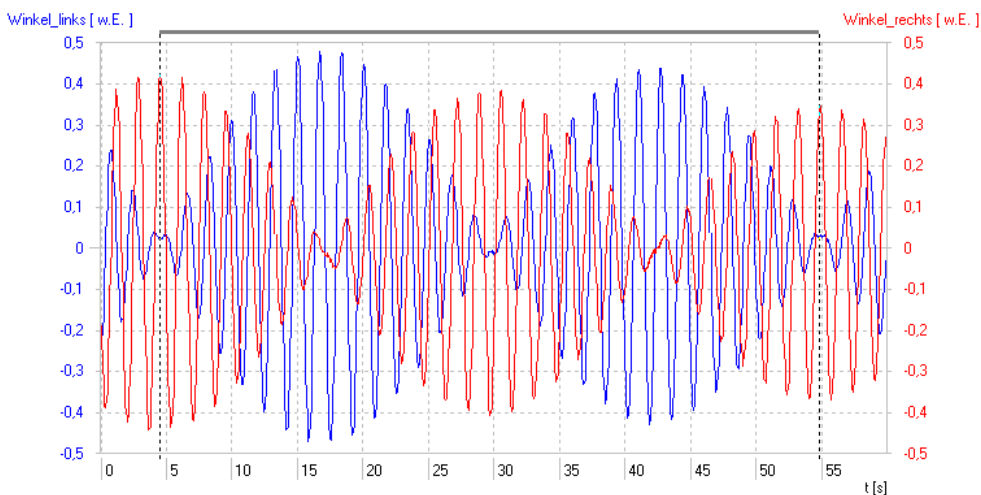


Fig. 5 Diagrama elongação-tempo da oscilação acoplada de flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada.

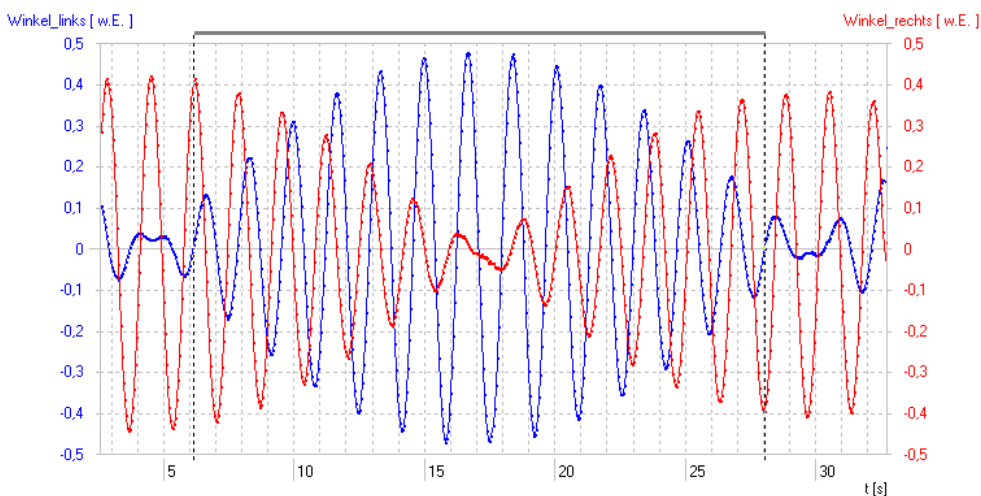


Fig. 6: Representação ampliada de um período de flutuação da oscilação acoplada com flutuação máxima (azul: pêndulo esquerdo, vermelho: pêndulo direito). A escala angular não está calibrada.

ANÁLISE

1. Determinação do período de uma oscilação acoplada em fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em fase.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo no diagrama, para tal, levar cada um de ambos cursores exatamente sobre a passagem a zero de um flanco ascendente, de modo que um número inteiro de períodos seja incluído (comparar Fig. 3).
- Ler o intervalo de tempo dos cursores na tabela abaixo do diagrama (fig. 3, quadro vermelho).

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_+ = \frac{27,8 \text{ s}}{16} = 1,737 \text{ s}$$

2. Determinação do período de uma oscilação acoplada em contra fase

- Abrir o jogo de dados da oscilação em contra fase e proceder do mesmo modo.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T_- = 1,629 \text{ s}$$

3. Determinação do período de uma oscilação acoplada com flutuação máxima

- Abrir o jogo de dados da oscilação com flutuação máxima.
- Incluir com o cursor um, ou se possível, vários períodos de oscilação (comparar fig. 5) e ler o intervalo de tempo dos cursores debaixo do diagrama.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos de flutuação incluídos resulta na duração do período de flutuação

$$T_{\Delta} = 25 \text{ s}$$

- Alterar a escala do eixo de tempo de modo que um período de flutuação seja representado de forma ampliada.
- Incluir com o cursor o máximo de períodos de oscilação de um pêndulo dentro um período de flutuação (intervalo de tempo entre duas paradas do pendulo na posição de repouso) (comparar fig. 6) e ler o intervalo de tempo dos cursores debaixo do diagrama.

O quociente do intervalo de tempo dos cursores e do número de períodos incluídos resulta na duração do período

$$T = 1,685 \text{ s}$$

4. Comparação dos períodos de flutuação e de oscilação com os valores calculados a partir do período de oscilação próprio

Para o período T da oscilação acoplada com flutuação máxima resulta de (8):

$$T = 2 \cdot \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ + T_-} = 1,681 \text{ s} \quad (9)$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido $T = 1,685 \text{ s}$.

De modo semelhante calcula-se o período de flutuação T_{Δ} . No entanto, deve-se levar em conta que este normalmente é definido como o tempo transcorrido entre dois momentos imóveis do pêndulo na posição de repouso. Isto corresponde à metade da duração do período do termo de co-seno ou seno modulador em (7).

$$T_{\Delta} = \frac{T_+ \cdot T_-}{T_+ - T_-} = 26 \text{ s} \quad (10)$$

Este valor deve ser comparado com o valor medido $T_{\Delta} = 25 \text{ s}$.

O desvio de aproximadamente um segundo do valor medido pode parecer grosseiro a primeira vista, este reside porém, na dependência delicada da diferença dos períodos próprios. Mesmo um desvio de uns quatro milissegundos, o que se situa no quadro da precisão de medição máxima para o período próprio possível nesta experiência, já implica uma alteração do período da flutuação de um segundo.

5. Determinação da constante de elasticidade de molas acopladas

A constante de elasticidade das molas acopladas D depende da constante de acoplamento k da seguinte maneira:

$$D = k \cdot \frac{L}{d^2} \cdot m \quad (11)$$

(d : distância entre a fixação das molas acopladas e o ponto onde está pendurado o pêndulo).

No caso de acoplamento fraco ($k \ll g$), a constante de elasticidade só tem uma influência limitada sobre o período da oscilação em contra fase, mas tem grande influência no período de flutuação. Por isso deve-se utilizar uma relação ao período de flutuação para se determinar a constante de elasticidade, a qual é obtida quando se aplica (4) em (8) e logo se a transforma para k .

$$k = 2 \cdot L \cdot (\omega_{\Delta}^2 - \omega_{\Delta} \cdot \omega_+) \quad (12)$$

Agora expressam-se as frequências circulares através de períodos de oscilação e se as aplica em (11).

$$D = \frac{L}{d^2} \cdot m \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{T_+}{T_{\Delta}} + \frac{T_+^2}{T_{\Delta}^2} \right) = 3,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (13)$$