

## Momento de inércia

### DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE DIFERENTES CORPOS DE TESTE

- Determinação da grandeza de orientação angular  $D_T$  da mola de acoplamento.
- Determinação do momento de inércia  $J$  da barra sem corpos de massa.
- Determinação do momento de inércia  $J$  em dependência da distância  $r$  dos corpos de massa em relação ao eixo de rotação.
- Determinação do momento de inércia  $J$  para um disco de madeira, uma esfera de madeira, assim como um cilindro maciço e um oco.
- Confirmação do Teorema de Steiner.

UE1040205

07/15 UD



Fig. 1: Disposição da medição

### FUNDAMENTOS GERAIS

A inércia de um corpo sólido perante uma alteração de seu movimento de rotação ao redor de um eixo fixo é dada pelo momento de inércia  $J$ . Ele depende da distribuição da massa no corpo relativa ao eixo de rotação e é tanto maior quanto maior for a distância para o eixo de rotação.

Em geral, o momento de inércia é definido pelo integral do volume:

$$(1) \quad J = \int_V \mathbf{r}_s^2 \rho(\mathbf{x}) \cdot dV$$

$r_s$ : Parte de  $r$  perpendicular ao eixo de rotação

$\rho(r)$ : Distribuição da massa do corpo

Para o exemplo de uma barra, em que são dispostos dois corpos de massa com a massa  $m$  simetricamente na distância  $r$  para o eixo de rotação, o momento de inércia é de:

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

$J_0$ : momento de inércia da barra sem corpos de massa

$J_m$ : momento de inércia dos corpos de massa

Agora, os diferentes corpos de teste podem ser afixados ao eixo de rotação. Para a duração de oscilação  $T$  de um período, vale:

$$(3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

$D_r$ : Grandeza de orientação angular da mola espiral

Ou seja, a duração de oscilação  $T$  é tanto maior quanto maior o momento de inércia  $J$ .

De (3) resulta a equação de determinação para o momento de inércia:

$$(4) \quad J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

A grandeza de orientação angular da mola espiral pode ser determinada com auxílio de um dinamômetro:

$$(5) \quad D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

$\alpha$ : Deslocamento da posição de equilíbrio

## LISTA DE APARELHOS

1 Eixo de torção	U20050	1008662
1 Fotocélula	U11365	1000563
1 Contador digital	U8533341	1001032/3
1 Base em tonel 1000 g	U13265	1002834
1 Tripé, 185 mm	U13271	1002836
1 Dinamômetro de precisão 1 N	U20032	1003104
1 Conjunto de corpos de amostra para o eixo de torção	U20051	1008663

## MONTAGEM E REALIZAÇÃO

- Montar a disposição de medição conforme mostrado na Fig. 1. Ajustar horizontalmente o eixo de torção com auxílio da borboleta e dos parafusos de nivelamento no tripé.
- Conectar a fotocélula na entrada A do contador digital. Ajustar o seletor no contador digital para o tipo de operação no símbolo para medição dos tempos de período de um pêndulo.

### Orientações:

- Sempre deslocar a disposição da experiência de forma que a mola de espiral seja comprimida e não estendida.
- No início do procedimento de oscilação, é recomendado um deslocamento de  $180^\circ$  (máx.  $360^\circ$ ).

### Determinação da grandeza de orientação angular $D_r$ da mola espiral

- Pendurar o dinamômetro sucessivamente em intervalos de  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30$  cm do centro do eixo de rotação na haste e deslocar por  $\alpha = 180^\circ = \pi$ . Atentar para que o dinamômetro esteja sempre disposto perpendicularmente à haste.
- Ler no dinamômetro os valores para a força necessária para o deslocamento nos respectivos intervalos. Anotar todos os valores na Tabela 1.

### Determinação do momento de inércia $J_0$ da haste sem corpos de massa

- Deslocar a haste sem corpos de massa afixados em  $180^\circ$  e medir, com auxílio do contador digital, a duração de um período de oscilação  $T_0$ .

### Determinação do momento de inércia $J$ em dependência da distância $r$ dos corpos de massa do eixo de rotação

- Fixar os dois corpos de massa na haste em distâncias de  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  e  $30$  cm de maneira respectivamente simétrica à esquerda e à direita do centro do eixo de rotação.
- Não usar os parafusos nos corpos de massa que pressionam as travas esféricas contra a haste; os parafusos são ajustados de forma que os corpos de massa possam ser deslocados e fixados contra a força centrífuga.
- Deslocar a haste em  $180^\circ$  e, com auxílio do contador digital, medir respectivamente a duração de um período de oscilação  $T$  e anotar na Tabela 2.

### Determinação do momento de inércia $J$ para um disco de madeira, uma esfera de madeira, um cilindro maciço e um oco

- Montar os corpos de amostra sucessivamente no eixo de torção. Para o cilindro maciço e oco, utilizar o prato de suporte.
- Para a medição da duração de um período de oscilação, fixar respectivamente, de forma adequada, uma bandeira interruptora de papel nos corpos de amostra.
- Deslocar o disco e a esfera de madeira sucessivamente em  $180^\circ$  e medir respectivamente a duração de um período de oscilação. Anotar os valores na Tab. 3. Utilizar as marcações brancas nos corpos de amostra como auxílio de orientação no deslocamento.
- Deslocar o prato de suporte em  $180^\circ$  e medir a duração de um período de oscilação. Anotar o valor na Tab. 3.
- Deslocar sucessivamente o cilindro maciço e o oco em  $180^\circ$  e medir a respectiva duração de um período de oscilação. Anotar os valores na Tab. 3. Utilizar as marcações brancas nos corpos de amostra como auxílio de orientação no deslocamento.

### Confirmação do Teorema de Steiner

- Fixar o pino sucessivamente nos furos com distância  $a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$  e  $14$  cm do centro do disco.
- Montar o disco para as diferentes posições do pino no eixo de torção, deslocar respectivamente em  $180^\circ$  e medir a duração de um período de oscilação. Para tanto, fixar, de forma adequada, uma bandeirinha de papel no disco. Anotar os valores na Tab. 4.

### EXEMPLO DE MEDIÇÃO

#### Determinação da grandeza de orientação angular $D_r$ da mola espiral

Tab. 1: Valores de medição para a força  $F$  na distância  $r$  do centro do eixo de rotação com deslocamento estático da haste em  $\alpha = 180^\circ = \pi$ .

$r / m$	$F / N$
0,05	1,72
0,10	0,86
0,15	0,58
0,20	0,46
0,25	0,32
0,30	0,26

#### Determinação do momento de inércia $J_0$ da haste sem corpos de massa

Duração de um período de oscilação  $T_0$ : 2460 ms

#### Determinação do momento de inércia $J$ em dependência da distância $r$ dos corpos de massa do eixo de rotação

Tab. 2: Duração de período  $T$  para a oscilação da haste com os corpos de massa fixados na haste na distância  $r$ .

$r / m$	$T / ms$
0,05	2825
0,10	3663
0,15	4740
0,20	5926
0,25	7170
0,30	8440

#### Determinação do momento de inércia $J$ para um disco de madeira, uma esfera de madeira, um cilindro maciço e um oco

Tab. 3: Duração do período  $T$  para a oscilação de diferentes corpos de amostra.

Corpo de amostra	$T / ms$
Disco	1800
Esfera	1880
Prato de suporte	512
Cilindro maciço + prato de suporte	917
Cilindro oco + prato de suporte	1171

#### Confirmação do Teorema de Steiner

Tab. 4: Duração do período  $T$  para a oscilação do disco ao redor de diferentes eixos à distância  $a$  do centro de gravidade.

$a / cm$	$T / ms$
0	2922
2	2960
4	3121
6	3327
8	3622
10	3948
12	4359
14	4748

### AVALIAÇÃO

#### Determinação da grandeza de orientação angular $D_r$ da mola espiral

De (5), deduz-se:

$$(6) \quad F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r} \quad \text{com } C = \alpha \cdot D_r$$

- Aplicar os valores de medição para as forças  $F$  da Tabela 1 contra os valores recíprocos das distâncias  $1/r$  e adaptar uma reta nos pontos de medição.

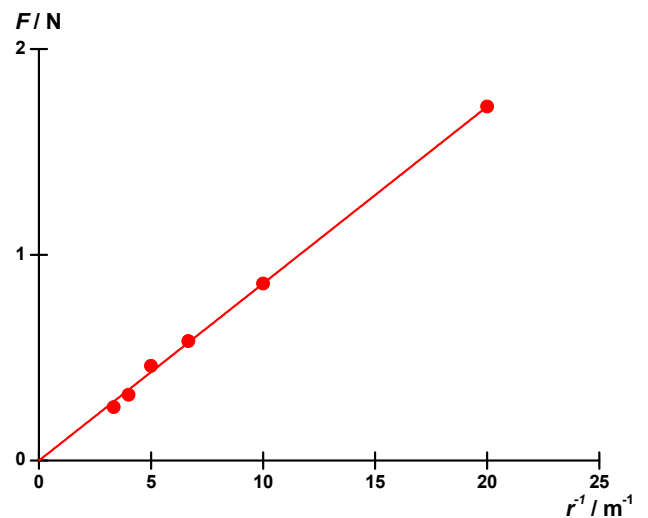


Fig. 2: Força  $F$  em dependência do valor recíproco da distância das massas  $1/r$ .

- Da inclinação  $C$  da reta conforme (6), determinar a grandeza de orientação angular  $D_r$ :

$$(7) \quad C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0,0860 \text{ Nm}}{\pi} = 0,0274 \text{ Nm}$$

**Determinação do momento de inércia  $J_0$  da haste sem corpos de massa**

Para o momento de inércia da haste sem corpos de massa resulta, a partir de (4):

$$(8) \quad J_0 = 0,0274 \text{ Nm} \cdot \frac{(2,460 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

**Determinação do momento de inércia  $J$  em dependência da distância  $r$  dos corpos de massa do eixo de rotação**

- Determinar o momento de inércia  $J$  da haste com corpos de massa conforme (4) a partir dos valores na Tab. 2 e anotar na Tab. 5.

- Determinar o momento de inércia  $J_m$  dos corpos de massa conforme

$$(9) \quad J_m = J - J_0$$

e anotar na Tab. 5.

Tab. 5: Duração do período  $T$ , momento de inércia  $J$  da haste com corpos de massa e momento de inércia  $J_m$  dos corpos de massa para diferentes distâncias  $r$  para o eixo de rotação

$r / \text{m}$	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_m / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0,05	2,825	5,54	1,34
0,10	3,663	9,31	5,11
0,15	4,740	15,6	11,4
0,20	5,926	24,4	20,2
0,25	7,170	35,7	31,5
0,30	8,440	49,4	45m2

Conforme (2), vale:

$$(10) \quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Aplicar os momentos de inércia  $J_m$  da Tabela 5 contra os quadrados das distâncias  $r^2$  e confirmar a dependência linear em (10) (Fig. 3).

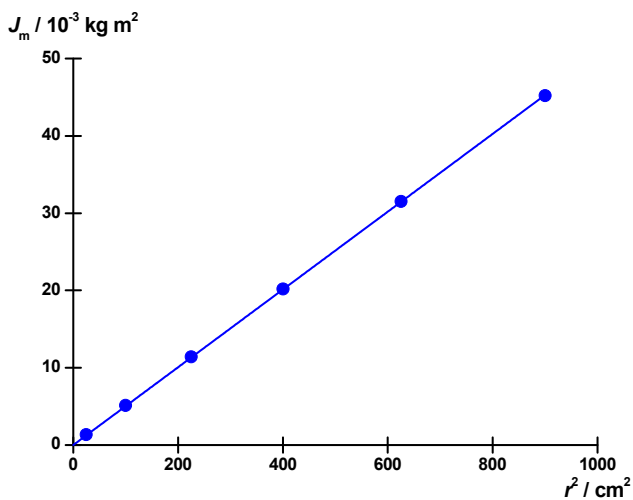


Fig. 3: Momento de inércia  $J_m$  dos corpos de massa em dependência do quadrado da distância das massas  $r$ .

**Determinação do momento de inércia  $J$  para um disco de madeira, uma esfera de madeira, um cilindro maciço e um oco**

- Determinar os momentos de inércia  $J$  para os diferentes corpos de amostra conforme (4) a partir dos valores de medição na Tab. 3 e anotar os valores na Tab. 6.

- Para a determinação dos momentos de inércia do cilindro maciço e do oco  $J_V$  e  $J_H$ , subtrair respectivamente o momento de inércia do prato de suporte  $J_T$  dos valores dos momentos de inércia do cilindro maciço + prato de suporte e do cilindro oco + prato de suporte  $J_{VT}$  e  $J_{HT}$ :

$$(11) \quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned}$$

- Calcular os momentos de inércia teóricos  $J_{th}$  com auxílio dos dados no anexo, anotar na Tab. 6 e comparar com os valores determinados a partir da medição.

Tab. 6: Momentos de inércia  $J$  para diferentes corpos de amostra.

Corpo de amostra	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_{th} / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Disco	1,800	2,25	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 2,57$
Esfera	1,880	2,45	$2/5 \cdot m \cdot r^2 = 2,54$
Prato de suporte	0,512	0,18	–
Cilindro maciço + Prato de suporte	0,917	0,58	–
Cilindro maciço	–	0,40	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 0,43$
Cilindro oco + Prato de suporte	1,171	0,95	–
Cilindro oco	–	0,77	$m \cdot r^2 = 0,86$

Os valores determinados a partir da medição conferem com os valores teóricos calculados.

**Confirmação do Teorema de Steiner**

- Determinar os momentos de inércia  $J_a$  para as diferentes distâncias  $a$  conforme (4) a partir dos valores de medição na Tab. 4 e anotar os valores na Tab. 7.

Tab. 7: Momento de inércia  $J_a$  do disco em oscilação ao redor de diferentes eixos à distância  $a$  do centro de gravidade.

$a / \text{cm}$	$T / \text{s}$	$J_a / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0	2,922	5,93
2	2,960	6,08
4	3,121	6,76
6	3,327	7,68
8	3,622	9,11
10	3,948	10,8
12	4,359	13,2
14	4,748	15,6

- Conforme o Teorema de Steiner, vale:  
(12)  $J_a = J_0 + m \cdot a^2$  com  $J_0 = J_a (a = 0)$
- Aplicar  $J_a - J_0$  contra  $a^2$ , confirmar a dependência linear em (12) e, com ela, o Teorema de Steiner (Fig. 4).

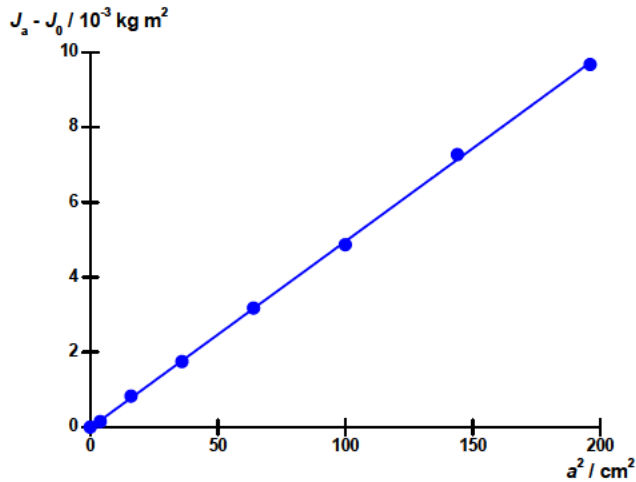


Fig. 4: Diferença dos momentos de inércia  $J_a - J_0$  do disco em dependência da distância  $a$  do eixo de oscilação em relação ao centro de gravidade.

## ANEXO: DADOS TÉCNICOS

### Barra

Comprimento:	620 mm
Massa:	aprox. 135 g
Peças de peso:	260 g cada

### Disco circular

Diâmetro:	320 mm
Massa:	aprox. 495 g
Orifícios:	8
Distância da perfuração:	20 mm

### Esfera de madeira

Diâmetro:	146 mm
Massa:	aprox. 1190 g

### Disco de madeira

Diâmetro:	220 mm
Altura:	15 mm
Massa:	aprox. 425 g

### Prato de recepção

Diâmetro:	100 mm
Massa:	aprox. 122 g

### Cilindro maciço (madeira)

Diâmetro:	90 mm
Altura:	90 mm
Massa:	aprox. 425 g

### Cilindro oco (metal)

Diâmetro externo:	90 mm
Altura:	90 mm
Massa:	aprox. 425 g