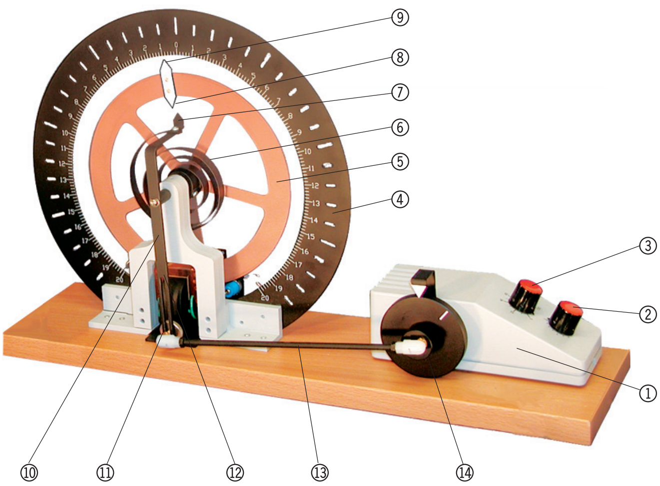
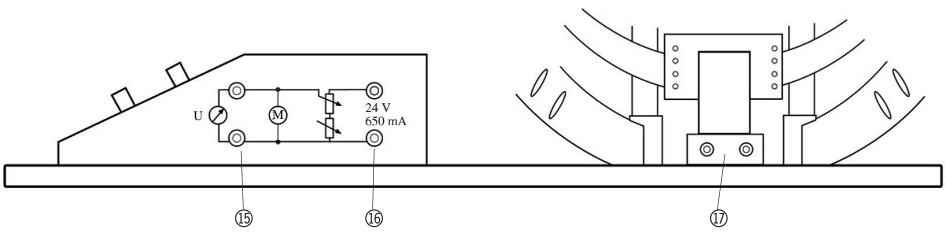
Pêndulo de torção segundo Prof. Pohl 1002956

Instruções para o uso

06/18 ALF



① Motor do excitador
② Botão rotativo para o ajuste fino da tensão do excitador
③ Botão rotativo para o ajuste grosseiro da tensão do excitador
④ Anel graduado
⑤ Corpo pendular
⑥ Mola caracol
⑦ Indicador da situação de fase do excitador
⑧ Indicador da situação de fase do corpo pendular
⑨ Indicador do ângulo de oscilação do corpo pendular
⑩ Excitador
⑪ Freio de corrente parasita
⑫ Fresta de controle e parafuso para o ajuste da amplitude do excitador
⑬ Vara para impulso
⑭ Roda de acionamento com excêntrico
⑮ Tomadas de segurança de 4 mm para a medição da tensão do excitador
⑯ Tomadas de segurança de 4 mm para a alimentação do motor do excitador
⑰ Tomadas de segurança de 4 mm para a alimentação do freio de corrente parasita



O pêndulo de torção serve para a análise de oscilações livres, forçadas e caóticas em diferentes casos de amortecimento.

Temas para experiências:

- Vibrações de torção livres em diferentes amortecimentos (queda na oscilação com amortecimento moderado, oscilação aperiódica e queda aperiódica da limitação)
- Oscilações forçadas e suas curvas de ressonância em vários casos de amortecimentos
- Transição fásica entre excitador e ressonador com queda de ressonância
- Oscilações de torção caóticas
- Determinação estática da grandeza de referência D
- Determinação dinâmica do momento de inércia J

1. Indicações de segurança

- Ao retirar o pêndulo de torção da sua embalagem, nunca o pegue pelo anel graduado! Podem ocorrer danos! Sempre retire o aparelho com o dispositivo previsto para isto! (Interior da embalagem).
- Para transportar o pêndulo de torção, sempre pegar o aparelho pela base.
- Não ultrapassar a tensão de alimentação máxima admitida do motor do excitador (24 V DC).
- O pêndulo de torção não deve ser sujeito a qualquer esforço físico desnecessário.

2. Descrição, dados técnicos

O pêndulo de torção segundo Prof. Pohl consiste num sistema oscilatório montado sobre uma placa base de madeira e um motor elétrico. O sistema oscilatório consiste numa roda de cobre com rolamento (5), a qual está conectada com a vara do excitador por meio de uma mola espiral (6) que por sua vez fornece o momento de restituição. Para a excitação do pêndulo de torção, utiliza-se um motor de corrente contínua com número de rotações ajustável de modo aproximado ou preciso, o qual expande e comprime a mola espiral numa seqüência periódica através de um excêntrico (14) com uma vara de impulso (13), levando assim a roda de cobre a oscilar. Para o amortecimento é utilizado um freio de corrente parasita eletromagnético (11). Um anel graduado (4) com frestas e uma escala com divisões de 2 mm envolve o sistema oscilatório; indicadores encontram-se no excitador e no ressoador. O aparelho também pode ser utilizado para a projeção de sombras em demonstrações.

Freqüência própria:	aprox. 0,5 Hz.
Freqüência do excitador:	0 até 1,3 Hz (ajustável sem escalonamento)
Conexões:	
motor:	máx. 24 V DC, 0,7 A, por tomadas de segurança de 4 mm
freio de corrente parasita:	0 até 20 V DC, máx. 2 A, por tomadas de segurança de 4 mm
Anel graduado:	300 mm Ø
Medidas:	400 mm x 140 mm x 270 mm
Massa:	4 kg

2.1 Fornecimento

1 pêndulo de torção
2 massas adicionais de 10 g
2 massas adicionais de 20 g

3. Fundamentos teóricos

3.1 Símbolos utilizados nas fórmulas

D	=	Grandeza de referência angular
J	=	Momento de inércia da massa
M	=	Momento de torção de restituição
T	=	Duração do período
T_0	=	Duração do período do sistema sem amortecimento
T_d	=	Duração do período do sistema com amortecimento
$\widehat{M}_E$	=	Amplitude do momento de torção do excitador
b	=	Momento do amortecimento
n	=	Número de períodos
t	=	Tempo
Λ	=	Decremento logarítmico
δ	=	Constante de amortecimento
φ	=	Deslocamento angular
$\widehat{\varphi}_0$	=	Amplitude no tempo t = 0 s
$\widehat{\varphi}_n$	=	Amplitude após n períodos
$\widehat{\varphi}_E$	=	Amplitude do excitador
$\widehat{\varphi}_S$	=	Amplitude do sistema
ω_0	=	Freqüência própria do sistema oscilatório
ω_d	=	Freqüência própria do sistema amortecido
ω_E	=	Freqüência circular do excitador
$\omega_{E\ res}$	=	Freqüência circular para a amplitude máx.
Ψ_{0S}	=	Ângulo de fase do sistema

3.2 Oscilações de torção harmônicas

Uma oscilação de torção harmônica se dá quando a força de restituição é proporcional ao deslocamento angular. Nas oscilações de torção harmônicas, o momento de torção de reação é proporcional ao deslocamento angular φ:

$$M = D \cdot \varphi$$

O fator de proporcionalidade D (grandeza de referência angular) pode ser calculado através da medição do deslocamento angular e do momento deslocador.
A freqüência própria circular do sistema ω_0 resulta das medições da duração do período T a partir de

$$\omega_0 = 2\,\pi/T$$

e do momento de inércia da massa J a partir de

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}$$

3.3 Oscilações de torção livres amortecidas

Num sistema oscilatório no qual energia é perdida por causa de perdas por atrito sem que esta energia seja compensada por aporte externo de energia, a amplitude diminui constantemente, ou seja, a oscilação é amortecida.
Enquanto isso, o momento de amortecimento b é proporcional à velocidade angular $\dot{\varphi}$.
A partir do equilíbrio de momentos de torção resulta a equação de movimento

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

Para a oscilação sem amortecimento vale b = 0
Se a oscilação no tempo t = 0 s começa com a amplitude máxima $\widehat{\varphi}_0$ a solução da equação diferencial com um amortecimento não muito forte resulta em ($\delta^2 < \omega_0^2$) (caso oscilatório)

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

$\delta = b/2\,J$ é a constante de amortecimento e

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

é a freqüência própria do sistema amortecido.
No caso de um amortecimento forte ($\delta^2 > \omega_0^2$) o sistema não oscila, mais se arrasta para o ponto de descanso (caso de arraste).
A duração de período T_d do sistema oscilatório amortecido só varia muito pouco com relação ao valor T_0 do sistema oscilatório sem amortecimento.
Pela introdução de $t = n \cdot T_d$ na equação

$$\varphi = \widehat{\varphi}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t)$$

e a amplitude após n períodos $\varphi = \widehat{\varphi}_n$ obtém-se com a relação $\omega_d = 2\,\pi/T_d$

$$\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_0} = e^{-n \cdot \delta\ \cdot T_d}$$

e a partir disso o decremento logarítmico Λ:

$$\Lambda = \delta \cdot T_{\mathrm{d}} = \frac{1}{n} \cdot ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_{\mathrm{n}}}{\widehat{\varphi}_{0}}\right] = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_{\mathrm{n}}}{\widehat{\varphi}_{\mathrm{n+1}}}\right]$$

Pela introdução de $\delta = \Lambda / T_{\mathrm{d}}$, $\omega_0 = 2\pi / T_0$ e $\omega_{\mathrm{d}} = 2\pi / T_{\mathrm{d}}$ na equação

$$\omega_{\mathrm{d}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

obtém-se:

$$T_{\mathrm{d}} = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}$$

pelo qual a duração de período T_d pode ser calculada exatamente se o valor T_0 é conhecido.

3.4 Oscilações de torção forçadas

No caso de oscilações de torção forçadas, um momento de torção variável periodicamente com uma função seno age do exterior sobre o sistema oscilatório. Completa-se esse momento do excitador na equação de movimento

$$J \cdot \ddot{\varphi} + b \cdot \dot{\varphi} + D \cdot \varphi = \widehat{M}_{\mathrm{E}} \cdot sin(\omega_{\mathrm{E}} \cdot t)$$

Depois da iniciação da oscilação, o pêndulo de torção oscila num estado estacionário com a mesma freqüência circular que o excitador, sendo que não se encontra defasado nem com ω_E ou contra ω_0. Ψ_{0S} é o ângulo de fase do sistema, a defasagem entre o sistema oscilatório e o excitador.

$$\varphi = \widehat{\varphi}_{\mathrm{S}} \cdot \sin(\omega_{\mathrm{E}} \cdot t - \Psi_{0\mathrm{S}})$$

Para a amplitude do sistema $\widehat{\varphi}_{\mathrm{S}}$ é válido

$$\widehat{\varphi} = \frac{\dfrac{\widehat{M}_{\mathrm{E}}}{J}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{E}}^2\right)^2 + 4\delta^2 \cdot \omega_{\mathrm{E}}^2}}$$

Para a relação entre a amplitude do sistema e a amplitude do excitador é válido

$$\frac{\widehat{\varphi}_{\mathrm{S}}}{\widehat{\varphi}_{\mathrm{E}}} = \frac{\dfrac{\widehat{M}_{\mathrm{E}}}{J}}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\omega_{\mathrm{E}}}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\dfrac{\delta}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\omega_{\mathrm{E}}}{\omega_0}\right)^2}}$$

Nas oscilações sem amortecimento, a amplitude, em caso de ressonância (ω_E igual a ω_0) cresce teoricamente infinitamente e leva ao "colapso por ressonância".
Nas oscilações amortecidas e com amortecimento não muito forte a amplitude do sistema atinge seu máximo, sendo que a freqüência circular do excitador $\omega_{E\ res}$ é menor do que a freqüência própria do sistema. Esta freqüência resulta de

$$\omega_{\mathrm{Eres}} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}$$

Com amortecimento forte não há aumento excessivo de amplitude.
Para o ângulo de fase do sistema Ψ_{0S} é válido

$$\Psi_{0\mathrm{S}} = arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_{\omega}^2}\right)$$

Para $\omega_E = \omega_0$ (ressonância), o ângulo de fase do sistema $\Psi_{0S} = 90°$. Isto é válido também para $\delta = 0$ com a extrapolação correspondente.
No caso das oscilações amortecidas ($\delta > 0$) e $\omega_E < \omega_0$ resulta $0° \le \Psi_{0S} \le 90°$, para $\omega_E > \omega_0$ é válido $90° \le \Psi_{0S} \le 180°$.
No caso de oscilações sem amortecimento ($\delta = 0$) é válido $\Psi_{0S} = 0°$ com $\omega_E < \omega_0$ e $\Psi_{0S} = 180°$ para $\omega_E > \omega_0$.

4. Utilização

4.1 Oscilações de torção livres amortecidas

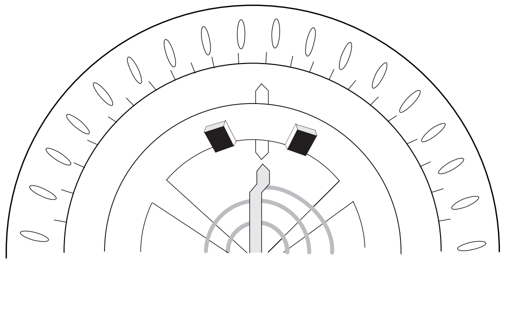
- Conectar o freio de corrente parasita com a saída para tensão ajustável do transformador de alimentação do pêndulo de torção.
- Conectar o amperímetro com o circuito elétrico.
- Determinar a constante de amortecimento dependendo da corrente.

4.2 Oscilações de torção forçadas

- Conectar as tomadas de conexão (16) do motor do excitador com a saída de tensão fixa do transformador do pêndulo de torção.
- Conectar o voltímetro com as tomadas de conexão (15) do motor do excitador.
- Determinar a amplitude de oscilação em relação de dependência com a freqüência do excitador ou com a tensão de alimentação.
- Caso seja necessário, conectar o freio de corrente parasita com a saída de tensão ajustável do transformador do pêndulo de torção.

4.3 Oscilações caóticas

- Para a produção de oscilações caóticas, encontram-se 4 massas adicionais, estas modificam o momento de restauração linear do pêndulo de torção.
- Para tal, aparafusar as massas adicionais no corpo pendular (5).



5. Exemplos de experiências

5.1 Oscilações de torção livres amortecidas

- Para determinar o decremento logarítmico Λ, medem-se e estabelece-se a média das amplitudes em várias operações. Para tal, registra-se o balanço do pêndulo na escala em duas séries de medições, a cada vez com leitura à esquerda e à direita.
- O ponto inicial do pêndulo encontrava-se em 15 ou –15 na escala. Cinco deslocamentos foram registrados.
- Da relação entre as amplitudes, obtém-se Λ com a fórmula

$$\Lambda = ln\left[\frac{\widehat{\varphi}_n}{\widehat{\varphi}_{n+1}}\right]$$

n	$\widehat{\varphi}$ –				$\widehat{\varphi}$ +			
0	–15	–15	–15	–15	15	15	15	15
1	–14,8	–14,8	–14,8	–14,8	14,8	14,8	14,8	14,8
2	–14,4	–14,6	–14,4	–14,6	14,4	14,4	14,6	14,4
3	–14,2	–14,4	–14,0	–14,2	14,0	14,2	14,2	14,0
4	–13,8	–14,0	–13,6	–14,0	13,8	13,8	14,0	13,8
5	–13,6	–13,8	–13,4	–13,6	13,4	13,4	13,6	13,6

n	Ø $\widehat{\varphi}$ –	Ø $\widehat{\varphi}$ +	Λ –	Λ +
0	–15	15		
1	–14,8	14,8	0,013	0,013
2	–14,5	14,5	0,02	0,02
3	–14,2	14,1	0,021	0,028
4	–13,8	13,8	0,028	0,022
5	–13,6	13,5	0,015	0,022

- O valor obtido para Λ é Λ = 0,0202.
- Para duração de oscilação T do pêndulo é válido $t = n \cdot T$. Para tal, medir o tempo par 10 oscilações com um cronômetro e calcular T.

  $T = 1{,}9$ s

- A partir destes valores pode-se determinar a constante de amortecimento δ com δ = Λ / T.

  $\delta = 0{,}0106\ s^{-1}$

- Para a freqüência própria ω é válido

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2}$$

$\omega = 3{,}307$ Hz

5.2 Oscilações de torção livres amortecidas

- Para determinar a constante de amortecimento δ em relação de dependência com a corrente I através do imã eletromagnético, foi realizado o mesmo ensaio com o freio de corrente parasita ligado com I = 0,2 A, 0,4 A e 0,6 A.

I = 0,2 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–13,6	–13,8	–13,8	–13,6	–13,7	0,0906
2	–12,6	–12,8	–12,6	–12,4	–12,6	0,13
3	–11,4	–11,8	–11,6	–11,4	–11,5	0,0913
4	–10,4	–10,6	–10,4	–10,4	–10,5	0,0909
5	9,2	–9,6	–9,6	–9,6	–9,5	0,1

- Com T = 1,9 s e média de Λ = 0,1006 resulta a constante de amortecimento: δ = 0,053 s^{-1}

I = 0,4 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–11,8	–11,8	–11,6	–11,6	–11,7	0,248
2	–9,2	–9,0	–9,0	–9,2	–9,1	0,25
3	–7,2	–7,2	–7,0	–7,0	–7,1	0,248
4	–5,8	–5,6	–5,4	–5,2	–5,5	0,25
5	–4,2	–4,2	–4,0	–4,0	–4,1	0,29

- Com T = 1,9 s e média de Λ = 0,257 resulta a constante de amortecimento: δ = 0,135 s^{-1}

I = 0,6 A

n	$\widehat{\varphi}$ –				Ø $\widehat{\varphi}$ –	Λ –
0	–15	–15	–15	–15	–15	
1	–9,2	–9,4	–9,2	–9,2	–9,3	0,478
2	–5,4	–5,2	–5,6	–5,8	–5,5	0,525
3	–3,2	–3,2	–3,2	–3,4	–3,3	0,51
4	–1,6	–1,8	–1,8	–1,8	–1,8	0,606
5	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	–0,8	0,81

- Com T = 1,9 s e média de Λ = 0,5858 resulta a constante de amortecimento: δ = 0,308 s^{-1}

5.3 Oscilações de torção forçadas

- Para determinar amplitude de oscilação dependendo da freqüência do excitador ou da tensão de alimentação registra-se a oscilação máxima do corpo pendular.

T = 1,9 s

Tensão do motor V	$\widehat{\varphi}$
3	0,8
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	3,3
7,6	20,0
8	16,8
9	1,6
10	1,1

- A freqüência circular do sistema ω_0 obtém-se pela medição da duração de período T

  $\omega_0 = 2\,\pi/T = 3{,}3069$ Hz
- Com uma tensão de motor de 7,6 V ocorre a maior distância angular, ou seja, ocorre o caso de ressonância.
- Logo foi efetuado o mesmo ensaio com o freio de corrente parasita ligado com I = 0,2 A, 0,4 A e 0,6 A.

I = 0,2 A

Tensão do motor V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,7
7	2,9
7,6	15,2
8	4,3
9	1,8
10	1,1

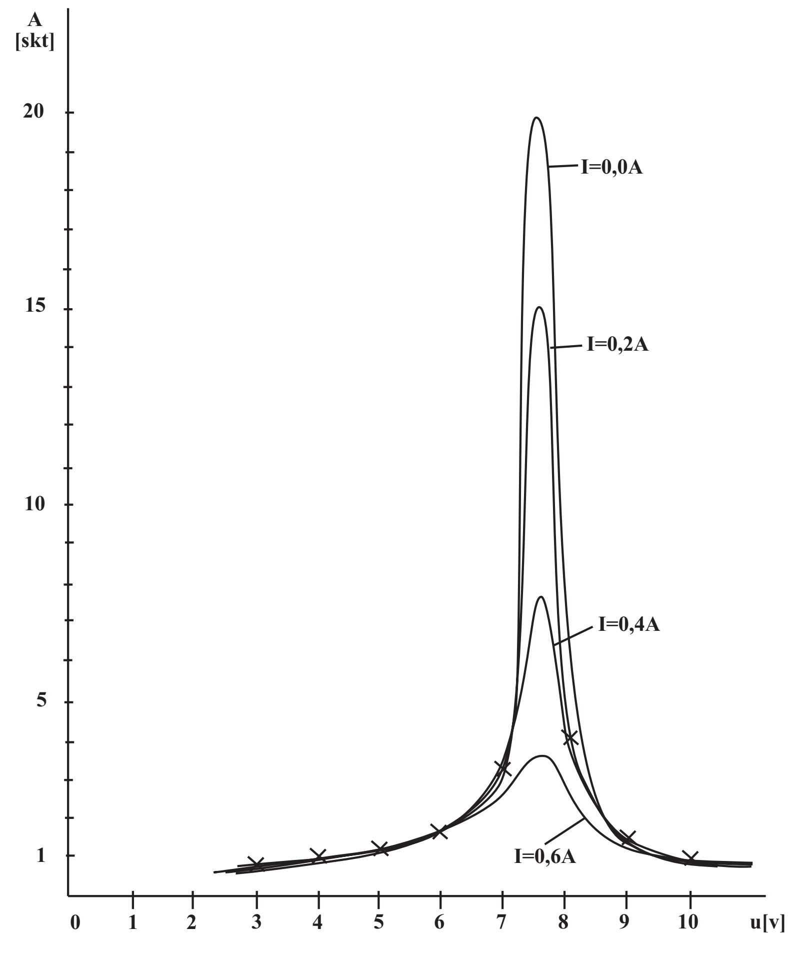
I = 0,4 A

Tensão do motor V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,3
6	1,8
7	3,6
7,6	7,4
8	3,6
9	1,6
10	1,0

I = 0,6 A

Tensão do motor V	$\widehat{\varphi}$
3	0,9
4	1,1
5	1,2
6	1,6
7	2,8
7,6	3,6
8	2,6
9	1,3
10	1,0

- A partir destas medições pode-se representar as curvas de ressonância de forma gráfica integrando as amplitudes dependendo da tensão do motor.
- Pela amplitude dos valores médios do gráfico pode-se determinar graficamente a freqüência de ressonância.



Curvas de ressonância