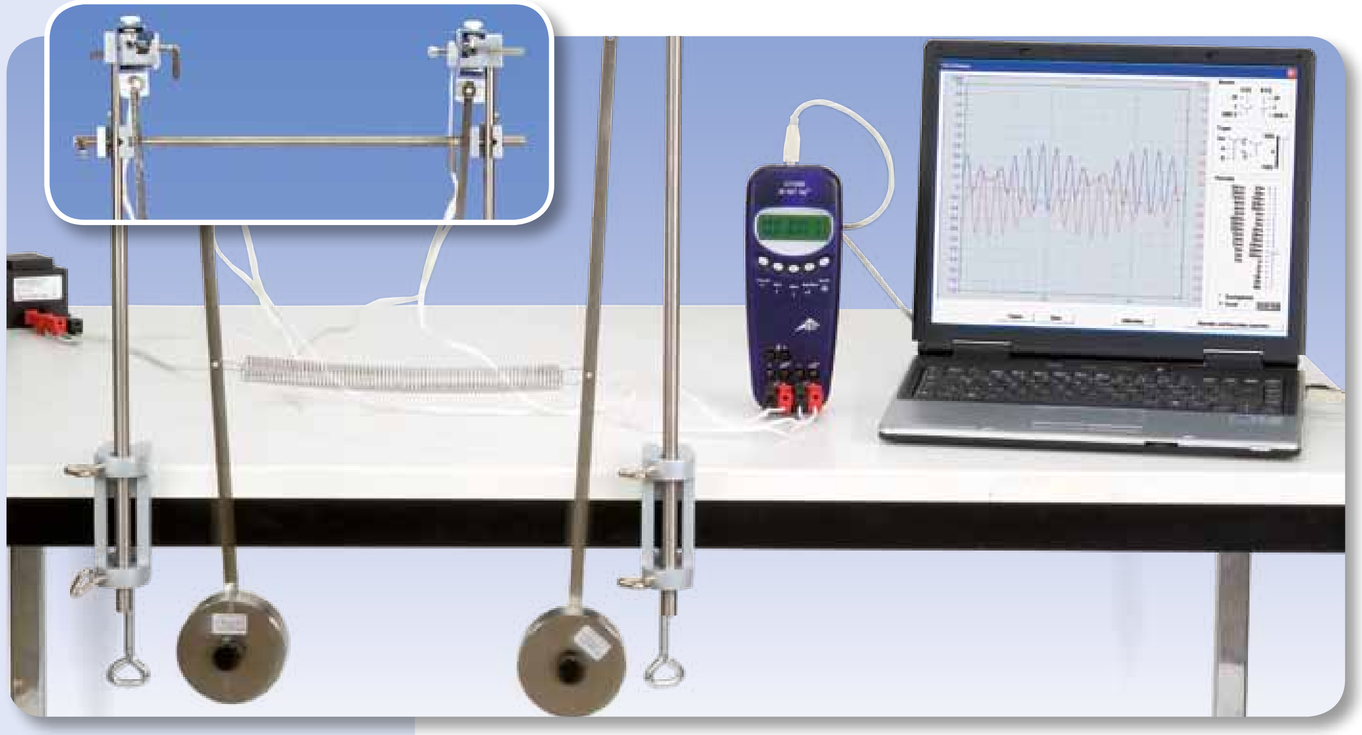
UE1050600

OSCILAÇÕES ACOPLADAS



TAREFAS

- **Registro da oscilação em fase e determinação da sua duração de oscilação T_+.**
- **Registro da oscilação afásica e determinação da sua duração de oscilação T_-.**
- **Registro de uma oscilação acoplada e determinação da sua duração de oscilação T assim como da duração de suspensão T_Δ.**
- **Comparação dos valores medidos com os valores calculados a partir da duração de oscilação própria T_+ e T_-.**

2

OBJETIVO

Registro e análise das oscilações de dois pêndulos idênticos e acoplados

RESUMO

A oscilação de dois pêndulos idênticos e acoplados pode ser caracterizada pela duração da oscilação e da duração da suspensão. Sendo que a duração da duração da suspensão é a distância entre dois pontos no tempo nos quais um pêndulo oscila em cada caso com a amplitude mínima. As duas grandezas podem ser calculadas a partir das durações de ambas as oscilação próprias para a oscilação em fase ou afásica dos pêndulos acoplados.

APARELHOS NECESSÁRIOS

Número	Instrumentos	Artigo Nº
2	Pêndulo de vara com registrador de ângulo (230 V, 50/60 Hz)	U8404275-230 ou
	Pêndulo de vara com registrador de ângulo (115 V, 50/60 Hz)	U8404275-115
1	Mola helicoidais 3,0 N/m	U15027
2	Fixador de mesa	U13260
2	Vara de apoio, 1000 mm	U15004
1	Vara de apoio, 470 mm	U15002
4	Manga universal	U13255
2	Cabo HF, BNC / conector de 4 mm	U11257
1	3B NET*log*™ (230 V, 50/60 Hz)	U11300-230 ou
	3B NET*log*™ (115 V, 50/60 Hz)	U11300-115
1	3B NET*lab*™	U11310

FUNDAMENTOS GERAIS

Durante a oscilação de dois pêndulos acoplados, a energia de oscilação é transferida entre os ambos pêndulos de um lado para o outro. Se os dois pêndulos são idênticos e a sua oscilação é lançada de modo que no começo um dos pêndulos se encontra em posição de repouso enquanto que o outro oscila, assim a transferência de energia é até mesmo completa. Ou seja, a cada vez um dos pêndulos chega a posição de repouso total, enquanto que o outro oscila na sua amplitude máxima. O tempo transcorrido entre dois pontos de repouso de um dos pêndulos, ou em geral entre dois momentos nos quais o pêndulo oscila com a mínima amplitude, é chamado T_Δ.

As oscilações de dois pêndulos matemáticos idênticos e acoplados podem ser descritas como a superposição de duas oscilações próprias. Estas oscilações próprias podem ser observadas quando os pêndulos são levados a oscilar em fase ou de modo afásico. No primeiro caso os pêndulos oscilam sem influência do acoplamento com a freqüência do pêndulo não acoplado, no segundo caso, eles oscilam com a influência máxima do acoplamento com uma freqüência própria maior. Todas as outras oscilações podem ser representadas como sobreposições destas duas oscilações. A equação de movimento dos pêndulos tem a forma:

(1)
$$L\cdot\varphi_1 + g\cdot\varphi_1 + k\cdot(\varphi_1-\varphi_2)=0$$
$$L\cdot\varphi_2 + g\cdot\varphi_2 + k\cdot(\varphi_2-\varphi_1)=0$$

g: Aceleração da gravidade, L: Comprimento do pêndulo,
k: Constante de acoplamento.

Para as grandezas auxiliares (primeiro introduzidas de forma aleatória) $\varphi_+ = \varphi_1+\varphi_2$ e $\varphi_- = \varphi_1-\varphi_2$ resultam então as equações de movimento:

(2)
$$L\cdot\varphi_+ + g\cdot\varphi_+ = 0$$
$$L\cdot\varphi_- + (g+2k)\cdot\varphi_- = 0$$

Cujas soluções

(3)
$$\varphi_+ = a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t)$$
$$\varphi_- = a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)$$

Com as freqüências circulares

(4)
$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{L}}$$
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g+2k}{L}}$$

correspondentes às oscilações próprias descritas com excitação em fase ou afásica (é válido $\varphi_+ = 0$ no caso da oscilação afásica e $\varphi_- = 0$ no caso da oscilação em fase).

Os balanços do pêndulo podem ser calculados a partir da soma ou da diferença das duas grandezas auxiliares, e assim obtém-se a solução

(5)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) + a_-\cdot\cos(\omega_- t) + b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a_+\cdot\cos(\omega_+ t) + b_+\cdot\sin(\omega_+ t) - a_-\cdot\cos(\omega_- t) - b_-\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

Sendo que aqui, os parâmetros a_+, a_-, b_+ e b_- são primeiramente grandezas aleatórias que podem ser calculadas a partir do estado de oscilação de ambos pêndulos no momento $t = 0$. O seguinte caso é o mais fácil de interpretar, sendo que é dado quando o pêndulo 1 no momento 0 a partir da posição zero ganha um ângulo inicial de velocidade ψ_0, enquanto o pêndulo 2 na posição zero encontra-se em repouso.

(6)
$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) + \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi_0}{\omega_+}\cdot\sin(\omega_+ t) - \frac{\psi_0}{\omega_-}\cdot\sin(\omega_- t)\right)$$

Então é válido para as velocidades de ambos pêndulos:

(7)
$$\varphi_1 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$$
$$\varphi_2 = \frac{\psi_0}{2}\cdot\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$$

Após uma reformulação matemática obtém-se

(8)
$$\varphi_1 = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$
$$\varphi_2 = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)\cdot\cos(\omega t)$$
com (9)
$$\omega_\Delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2}$$
$$\omega = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}$$

Isto corresponde à oscilação de ambos pêndulos com a mesma freqüência circular ω, sendo que as suas velocidades de amplitude ψ_1 e ψ_2 são moduladas com a freqüência circular ω_Δ:

(10)
$$\psi_1(t) = \psi_0\cdot\cos(\omega_\Delta t)$$
$$\psi_2(t) = \psi_0\cdot\sin(\omega_\Delta t)$$

ANÁLISE

A partir de (4) podem ser calculadas as durações de oscilação T_+ e T_- das oscilações próprias em fase e afásicas:

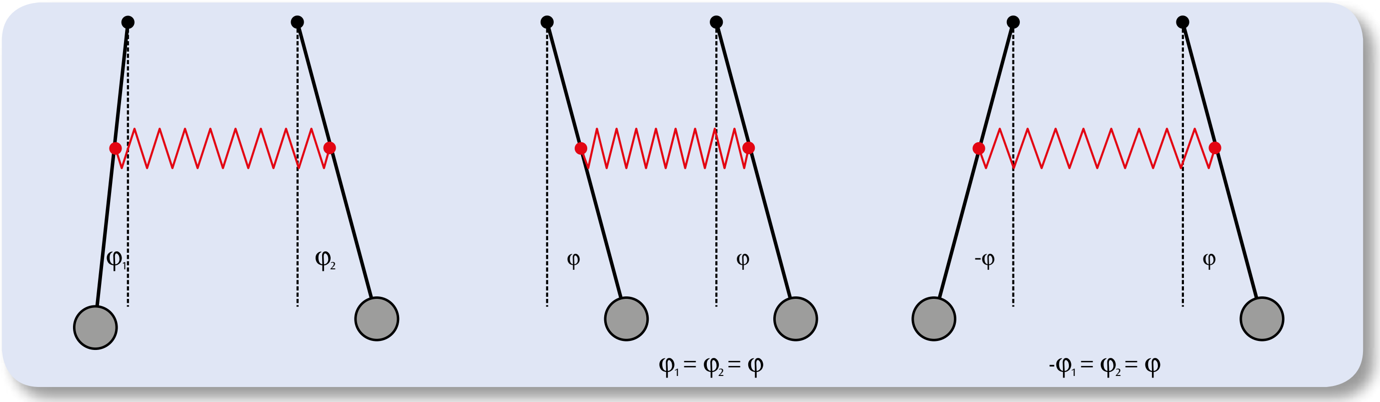
$$T_+ = \frac{2\pi}{\omega_+} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad T_- = \frac{2\pi}{\omega_-} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+2k}}$$

Para duração de oscilação T da oscilação acoplada é válido por causa de (9):

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{\pi}{T_+} + \frac{\pi}{T_-} \quad \text{e portanto} \quad T = 2\cdot\frac{T_+\cdot T_-}{T_- + T_+}$$

As modulações de amplitude descritas em (10) é normalmente caracterizada por meio da duração de suspensão T_Δ, sob a qual entendem-se dois momentos de repouso dos pêndulos:

$$\frac{2\pi}{2T_\Delta} = \omega_\Delta = \frac{\pi}{T_-} - \frac{\pi}{T_+} \quad \text{e portanto} \quad T_\Delta = \frac{T_+\cdot T_-}{T_+ - T_-}$$



Oscilação acoplada em geral

Oscilação acoplada em fase

Oscilação acoplada afásica